OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

ETAPA LOCALĂ – 10 FEBRUARIE 2024

Barem de evaluare și notare

Clasa a VI-a

Problema 1.	**7p**
a) La festivitatea de deschidere a jocurilor olimpice din anul 2024 unul dintre momentele prezentate necesită așezarea sportivilor în coloane de câte 10, apoi de câte 12 și în final de câte 18. Câți sportivi vor participa la realizarea momentului respectiv, dacă numărul lor este mai mare decât 1300 și mai mic decât 1500 ?	
Descompunerile în factori primi ale numerelor 10,12,18 C.m.m.m.c.=180 Numărul sportivilor =1440	**1p** **1p** **1p**
b) Determinați mulțimile $A = \{x \mid x = \overline{3a2b} \text{ și } \overline{3a2b} \vdots 36\}$ și $B = \{y \mid y = \overline{3c2d} \text{ și } \overline{3c2d} \vdots 45\}$, apoi calculați $(A \cup B) - (A \cap B)$ și $(A - B) \cup (B - A)$.	
$A = \{3024, 3420, 3528, 3924\}$ $B = \{3420, 3825\}$ $(A \cup B) - (A \cap B) = \{3024, 3528, 3825, 3924\}$ $(A - B) \cup (B - A) = \{3024, 3528, 3825, 3924\}$.	**1p** **1p** **1p** **1p**

Problema 2.	**7p**
Se dau cinci puncte A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 oricare trei necoliniare. a) Câte segmente determină cele cinci puncte? b) Fie A_k și A_p două puncte dintre cele cinci de mai sus. Distanța dintre două puncte A_k și A_p se calculează cu formula $d\left(A_k, A_p\right) = k + 5p,\ \ k < p$ (Exemplu: $d\,(A_1, A_3) = 1 + 5 \cdot 3 = 16$, $d\,(A_2, A_5) = 2 + 5 \cdot 5 = 27$). Să se afle distanțele dintre oricare două dintre punctele date. c) Notând un punct din cele cinci de mai sus cu A_k, numărul k se numește indice. Un călător pleacă din punctul A_1 și ajunge în punctul A_4 pe un traseu ales ținând cont de următoarele reguli: • La plecarea din punctul A_1 primește 100 de lei; • Dacă parcurge un segment de la un punct cu indice mai mic la un punct cu indice mai mare, plătește o sumă egală cu distanța dintre cele două puncte (în lei); • Dacă parcurge un segment de la un punct cu indice mai mare la un punct cu indice mai mic, primește o sumă egală cu distanța dintre cele două puncte (în lei); • Printr-un punct nu se poate trece de două ori. Ce traseu a ales călătorul pentru a avea la sosirea în punctul A_4 suma cea mai mare posibilă și care este această sumă?	
a) 10 segmente	**2p**
b) $d\,(A_1, A_2) = 11$, $d\,(A_1, A_3) = 16$, $d\,(A_1, A_4) = 21$, $d\,(A_1, A_5) = 26$ $d\,(A_2, A_3) = 17$, $d\,(A_2, A_4) = 22$, $d\,(A_2, A_5) = 27$ $d\,(A_3, A_4) = 23$ $d\,(A_3, A_5) = 28$, $d\,(A_4, A_5) = 29$	**3p**
c) Traseul $A_1\, A_5 \mapsto A_5\, A_4$ Suma: 103 lei	**1p** **1p**

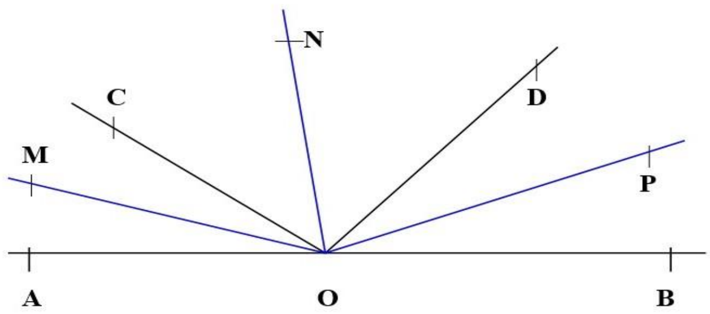
<table>
<tr><th>Problema 3.</th><th>7p</th></tr>
<tr><td colspan="2">

Se consideră punctele coliniare A, O, B în această ordine. De aceeaşi parte a dreptei AB considerăm punctele C şi D astfel încât $OC \perp OD$, iar punctul C este situat în interiorul unghiului $\measuredangle AOD$.

a) Arătați că unghiurile $\measuredangle AOC$ și $\measuredangle DOB$ sunt complementare.

b) Fie OM, ON, OP respectiv, bisectoarele unghiurilor $\measuredangle$AOC, $\measuredangle$COD și $\measuredangle$DOB. Ştiind că măsurile unghiurilor $\measuredangle$MON și $\measuredangle$NOP sunt direct proporţionale cu numerele 4 şi 5, să se afle măsurile unghiurilor $\measuredangle AOC$ și $\measuredangle DOB$.

</td></tr>
<tr><td>



a) $\measuredangle AOC + \measuredangle DOB = 180° - 90° = 90°$

</td><td>1p

2p</td></tr>
<tr><td>

Deoarece $OC \perp OD$ rezultă $m(\angle COD) = 90^\circ$

$$m(\sphericalangle MON) = \frac{1}{2}\left[m(\sphericalangle AOC) + m(\sphericalangle COD)\right] =$$
$$\frac{1}{2}\left[m(\sphericalangle AOC) + 90°\right] = 45° + \frac{m(\sphericalangle AOC)}{2}$$

Analog rezultă $m(\sphericalangle NOP) = 45° + \frac{m(\sphericalangle BOD)}{2}$

Notând cu x și y măsurile unghiurilor AOC și DOB ținând cont de enunţul problemei obţinem:

$$\frac{45° + \frac{x}{2}}{4} = \frac{45° + \frac{y}{2}}{5} \Rightarrow 225° + \frac{5x}{2} = 180° + 2y$$

Aducem la acelaşi numitor și se obține: $450^\circ + 5x = 360^\circ + 4y \Rightarrow 90^\circ + 5x = 4y$ (1)

Pe de altă parte $x + y = 90^\circ \Rightarrow 4x + 4y = 360^\circ$ de unde, folosind (1), rezultă:

$$4x + 90^\circ + 5x = 360^\circ$$
$$9x = 270^\circ \Rightarrow x = 30^\circ$$
$$y = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$$

Aşadar $m(\sphericalangle AOC) = 30°$ şi $m(\sphericalangle BOD) = 60°$.

</td><td>3p

1p</td></tr>
</table>

Problema 4.	**7p**
Determinați numerele naturale x, y, z și t, știind că sunt adevărate relațiile: $x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = 3000$ și $\frac{x}{x+2} = \frac{y}{y+4} = \frac{z}{z+6} = \frac{t}{t+8}$.	
$\frac{x}{2} = \frac{y}{4} = \frac{z}{6} = \frac{t}{8} = k$ $x = 2k;\ \ y = 4k;\ \ z = 6k, \quad t = 8k$ $(2k)^2 + (4k)^2 + (6k)^2 + (8k)^2 = 3000$ k=5 x=10, y=20, z=30, t=40	**2p** **1p** **1p** **1p** **2p**